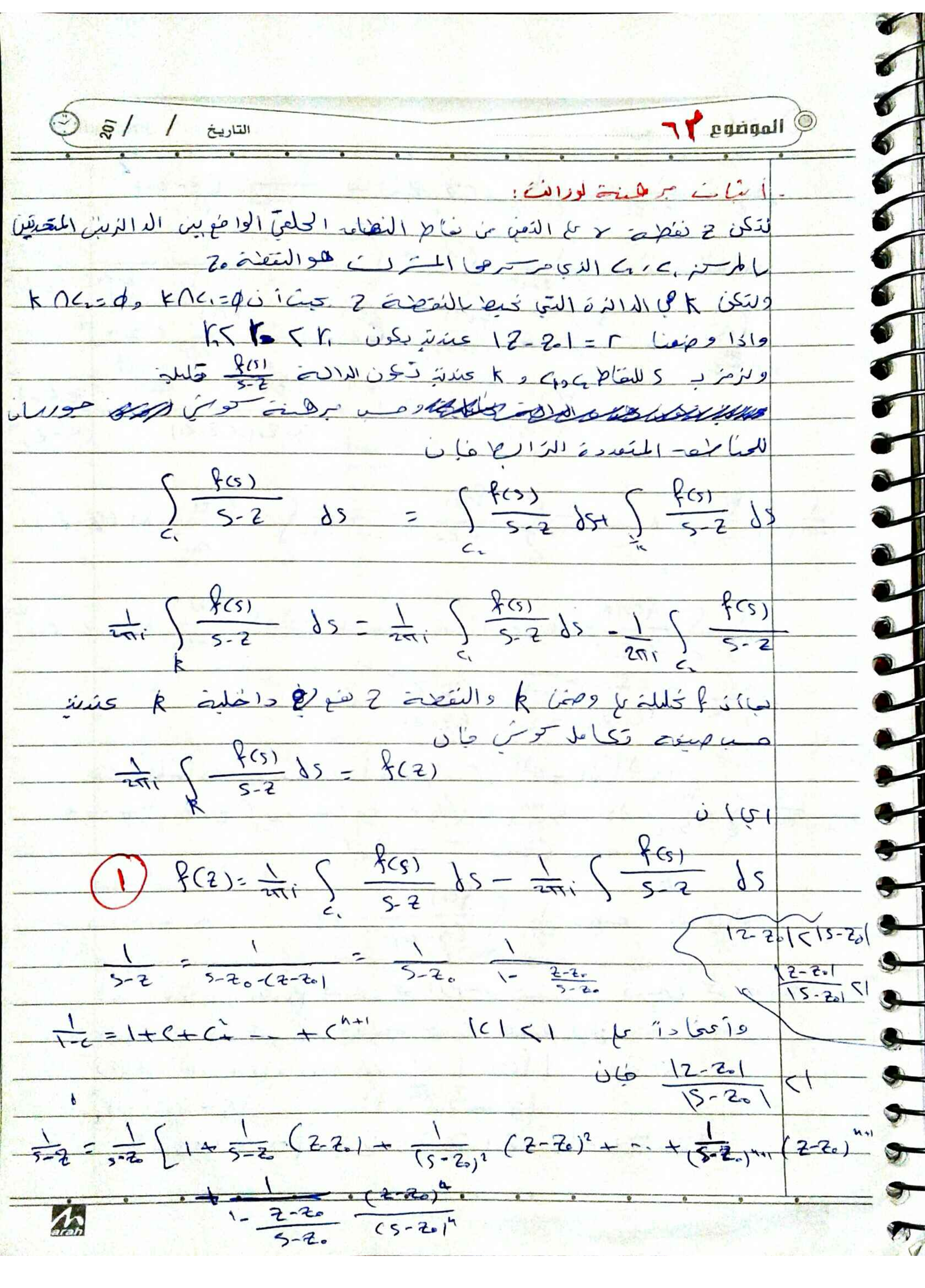


اثبات مبرهنة لورانت:

لتكن z نقطة ما في الداخل من نقاط النطاق الحلقي الواقع بين الدائرتين المتحدتين بالمركز C_1, C_2 الذي مركزهما المشترك هو النقطة z_0

ولتكن K هي الدائرة التي تحيط بالنقطة z بحيث أن $K \cap C_1 = \phi$ و $K \cap C_2 = \phi$

واذا وضعنا $|z-z_0| = r$ عندئذ يكون $r_1 < r < r_2$

ولنرمز بـ s للنقاط C_1, C_2 و K عندئذ تكون الدالة $\frac{f(s)}{s-z}$ تحليلية

ومن مبرهنة كوشي جورسات للمناطق المتعددة الترابط فإن

$$\int_{C_1} \frac{f(s)}{s-z}\, ds = \int_{C_2} \frac{f(s)}{s-z}\, ds + \int_{K} \frac{f(s)}{s-z}\, ds$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{K} \frac{f(s)}{s-z}\, ds = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_1} \frac{f(s)}{s-z}\, ds - \frac{1}{2\pi i}\int_{C_2} \frac{f(s)}{s-z}$$

بما أن f تحليلية على وضمن K والنقطة z تقع داخلية K عندئذ من صيغة تكامل كوشي فإن

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{K} \frac{f(s)}{s-z}\, ds = f(z)$$

أي أن

(1) $$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_1} \frac{f(s)}{s-z}\, ds - \frac{1}{2\pi i}\int \frac{f(s)}{s-z}\, ds$$

$$\frac{1}{s-z} = \frac{1}{s-z_0-(z-z_0)} = \frac{1}{s-z_0}\cdot\frac{1}{1-\frac{z-z_0}{s-z_0}}$$

$|z-z_0| < |s-z_0|$

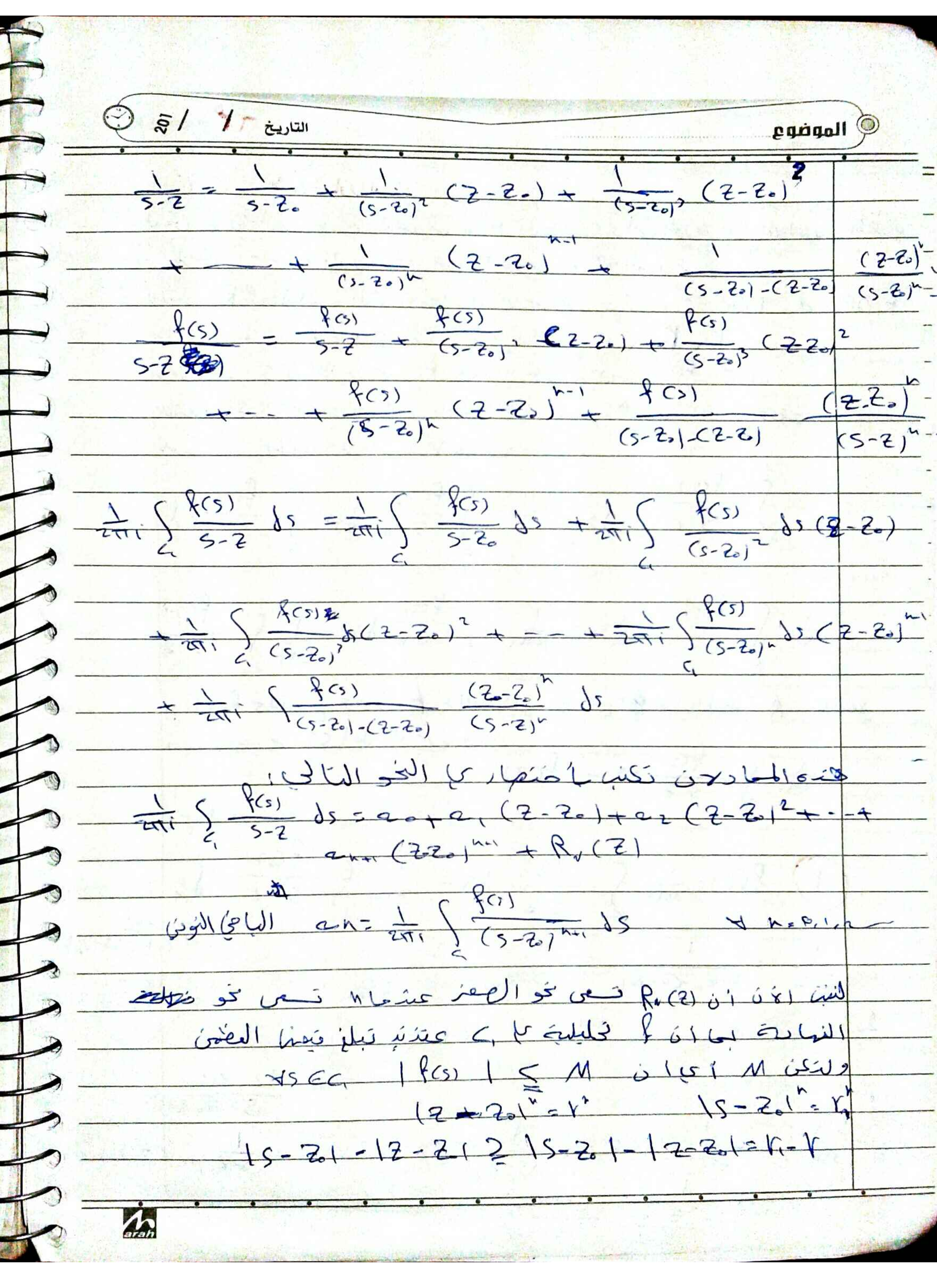
$\frac{|z-z_0|}{|s-z_0|} < 1$

$$\frac{1}{1-c} = 1 + c + c^2 + \dots + c^{n+1} \qquad |c| < 1$$ وإعتمادا على

فإن $\frac{|z-z_0|}{|s-z_0|} < 1$

$$\frac{1}{s-z} = \frac{1}{s-z_0}\left[1 + \frac{1}{s-z_0}(z-z_0) + \frac{1}{(s-z_0)^2}(z-z_0)^2 + \dots + \frac{1}{(s-z_0)^{n+1}}(z-z_0)^{n+1}\right.$$

$$+ \frac{1}{1-\frac{z-z_0}{s-z_0}}\,\frac{(z-z_0)^n}{(s-z_0)^n}$$



$$\frac{1}{s-z}=\frac{1}{s-z_0}+\frac{1}{(s-z_0)^2}(z-z_0)+\frac{1}{(s-z_0)^3}(z-z_0)^2$$
$$+\cdots+\frac{1}{(s-z_0)^n}(z-z_0)^{n-1}+\frac{1}{(s-z_0)-(z-z_0)}\,\frac{(z-z_0)^n}{(s-z_0)^n}$$

$$\frac{f(s)}{s-z}=\frac{f(s)}{s-z}+\frac{f(s)}{(s-z_0)^2}(z-z_0)+\frac{f(s)}{(s-z_0)^3}(z-z_0)^2$$
$$+\cdots+\frac{f(s)}{(s-z_0)^n}(z-z_0)^{n-1}+\frac{f(s)}{(s-z_0)-(z-z_0)}\,\frac{(z-z_0)^n}{(s-z)^n}$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_1}\frac{f(s)}{s-z}ds=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_1}\frac{f(s)}{s-z_0}ds+\frac{1}{2\pi i}\int_{C_1}\frac{f(s)}{(s-z_0)^2}ds\,(z-z_0)$$
$$+\frac{1}{2\pi i}\int_{C_1}\frac{f(s)}{(s-z_0)^3}ds\,(z-z_0)^2+\cdots+\frac{1}{2\pi i}\int_{C_1}\frac{f(s)}{(s-z_0)^n}ds\,(z-z_0)^{n-1}$$
$$+\frac{1}{2\pi i}\int\frac{f(s)}{(s-z_0)-(z-z_0)}\,\frac{(z-z_0)^n}{(s-z)^n}ds$$

هذه المعادلات تكتب باختصار على النحو التالي:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_1}\frac{f(s)}{s-z}ds=a_0+a_1(z-z_0)+a_2(z-z_0)^2+\cdots+a_{n-1}(z-z_0)^{n-1}+R_n(z)$$

حيث

$$a_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{C}\frac{f(s)}{(s-z_0)^{n+1}}ds \qquad \forall\, n=0,1,2,\ldots$$

الباقي النوني

لنثبت الآن أن $R_n(z)$ تسعى نحو الصفر عندما n تسعى نحو اللانهاية بما أن f تحليلية على C_1 عندئذ تبلغ قيمتها العظمى ولتكن M أي أن $|f(s)|\le M \quad \forall s\in C_1$

$$|z-z_0|^n=r^n \qquad |s-z_0|^n=r_1^n$$

$$|s-z_0|-|z-z|\ge|s-z_0|-|z-z_0|=r_1-r$$

ومنه فإن: $\int_{c} |ds| = 2\pi r_1$ و $\frac{1}{(s-z_0)-(z-z_0)} < \frac{1}{r_1-r}$

وبالتالي فإن:

$$|R_n(z)| \le \frac{M\, 2\pi r_1\, r^n}{2\pi (r_1-r)\, r_1^n} = \frac{M r_1}{r_1-r}\left(\frac{r}{r_1}\right)^n$$

وبما أن $\frac{r}{r_1} < 1$ فإن $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{r}{r_1}\right)^n = 0$

ومنه نستنتج بأن: $\lim_{n\to\infty} R_n(z) = 0$

$$-\frac{1}{s-z} = \frac{1}{z-s} = \frac{1}{z-z_0-(s-z_0)} = \frac{1}{(z-z_0)}\,\frac{1}{1-\frac{s-z_0}{z-z_0}}$$

وباستفادة من علاقة سابقة نجد أن:

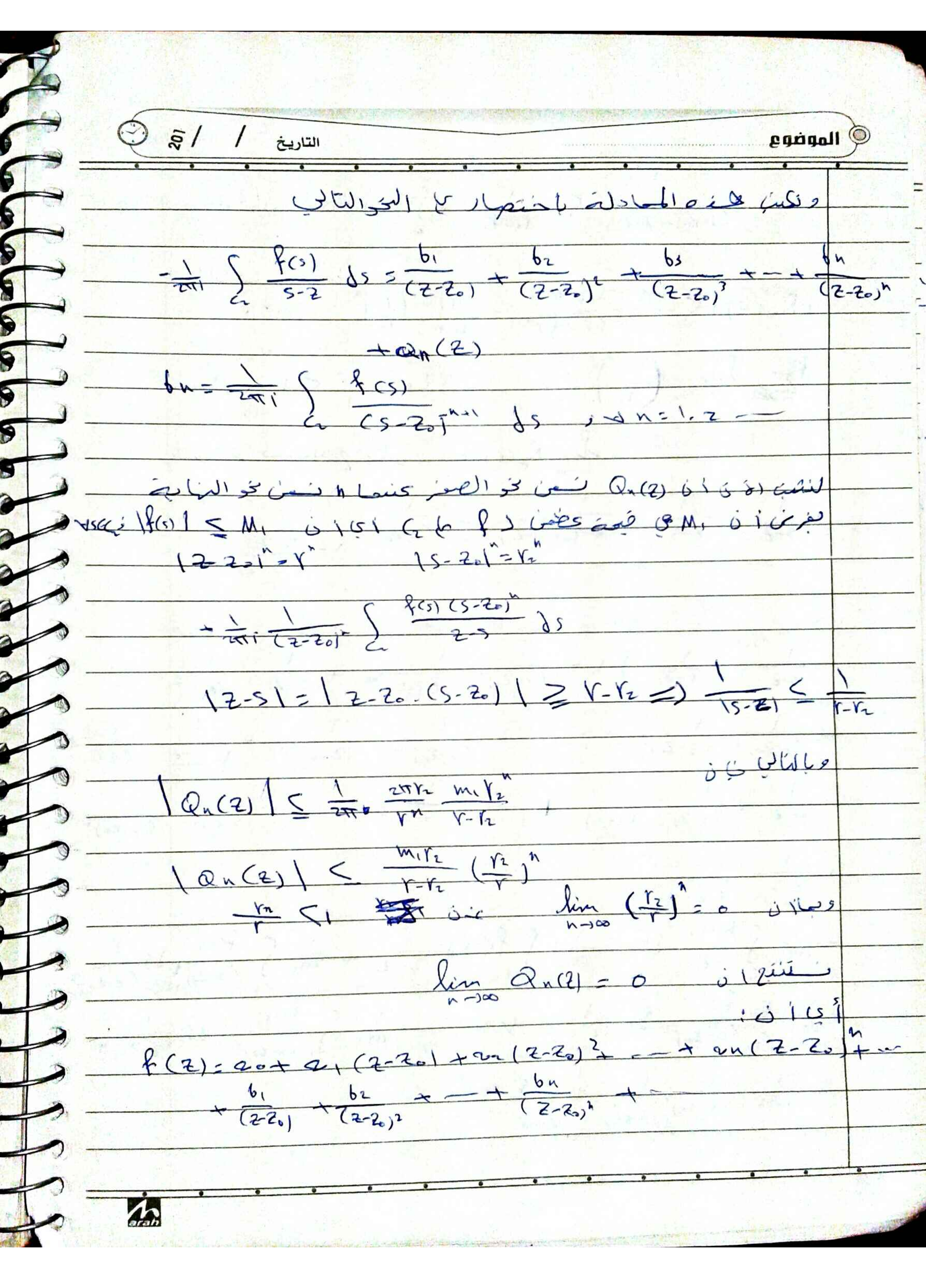
$$-\frac{1}{s-z} = \frac{1}{z-z_0}\Big\{1 + \frac{1}{(s-z_0)^{-1}}\frac{1}{(z-z_0)} + \frac{1}{(s-z_0)^{-2}}\frac{1}{(z-z_0)^2} + \frac{1}{(s-z_0)^{-3}}\frac{1}{(z-z_0)^3} + \cdots + \frac{1}{(s-z_0)^{-(n-1)}}\frac{1}{(z-z_0)^{n-1}} + \frac{1}{1-\frac{s-z}{z-z_0}}\frac{(s-z_0)^n}{(z-z_0)^n}$$

$$= \frac{1}{z-z_0} + \frac{1}{(s-z_0)^{-1}}\frac{1}{(z-z_0)^2} + \frac{1}{(s-z_0)^{-2}}\frac{1}{(z-z_0)^3} + \cdots + \frac{1}{(s-z_0)^{-(n-1)}}\frac{1}{(z-z_0)^n} + \frac{1}{z-s}\frac{(s-z_0)^n}{(z-z_0)^n}$$

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{C_1}\frac{R(s)}{s-z}\,ds = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_2} f(s)\,ds\,\frac{1}{z-z_0} + \frac{1}{2\pi i}\int_{C_2}\frac{f(s)}{(s-z_0)^{-1}}\,ds\,\frac{1}{(z-z_0)^2}$$

$$+ \frac{1}{2\pi i}\int_{C_2}\frac{f(s)}{(s-z_0)^{-2}}\,ds\,\frac{1}{(z-z_0)^3} + \cdots + \frac{1}{2\pi i}\int_{C_2}\frac{f(s)}{(s-z_0)^{-(n-1)}}\,ds\,\frac{1}{(z-z_0)^n}$$

$$+ \frac{1}{2\pi i}\,\frac{1}{(z-z_0)^n}\int_{C_2}\frac{f(s)(s-z_0)^n}{z-s}$$



ونكتب هذه المعادلة باختصار على النحو التالي

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{C_2}\frac{f(s)}{s-z}\,ds=\frac{b_1}{(z-z_0)}+\frac{b_2}{(z-z_0)^2}+\frac{b_3}{(z-z_0)^3}+\dots+\frac{b_n}{(z-z_0)^n}$$

$$+Q_n(z)$$

$$b_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_2}\frac{f(s)}{(s-z_0)^{-n+1}}\,ds \quad , \text{عند } n=1,2,\dots$$

لنثبت الآن أن $Q_n(z)$ تسعى نحو الصفر عندما n تسعى نحو النهاية

نفرض أن M_1 هي قيمة عظمى لـ f على C_2 أي أن $|f(s)|\le M_1$ لجميع $s\in C_2$

$|z-z_0|^n=r^n$ $|s-z_0|^n=r_2^n$

$$=\frac{1}{2\pi i}\frac{1}{(z-z_0)^n}\int_{C_2}\frac{f(s)(s-z_0)^n}{z-s}\,ds$$

$$|z-s|=|z-z_0-(s-z_0)|\ge r-r_2 \Rightarrow \frac{1}{|s-z|}\le\frac{1}{r-r_2}$$

وبالتالي فإن

$$|Q_n(z)|\le\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{2\pi r_2}{r^n}\,\frac{M_1 r_2^n}{r-r_2}$$

$$|Q_n(z)|\le\frac{M_1 r_2}{r-r_2}\left(\frac{r_2}{r}\right)^n$$

وبما أن $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{r_2}{r}\right)^n=0$ لأن $\frac{r_2}{r}<1$

نستنتج أن $\lim_{n\to\infty}Q_n(z)=0$

أي أن:

$$f(z)=a_0+a_1(z-z_0)+a_2(z-z_0)^2+\dots+a_n(z-z_0)^n+\dots$$

$$+\frac{b_1}{(z-z_0)}+\frac{b_2}{(z-z_0)^2}+\dots+\frac{b_n}{(z-z_0)^n}+\dots$$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z-z_0)^n} \qquad r_2 < |z-z_0| < r_1$$

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_{c_1} \frac{f(s)}{(s-z_0)^{n+1}}\, ds \qquad ; n = 0, 1, 2, \dots$$

$$b_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_{c_2} \frac{f(s)}{(s-z_0)^{-n+1}}\, ds \qquad ; n = 1, 2, \dots$$

مثال ١: أوجد منشور الدالة $f(z) = \frac{z}{(z-1)(z-2)}$ في النطاق $1 < |z| < 2$

الحل:

مركز النشر هو $z=0$ والنطاق الحلقي المحصور بين دائرتين c_1 و c_2 بحيث $1 < r_2 < r_1 < 2$ عندئذٍ

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z-0)^n} \qquad ; 1 < r_2 < |z-0| < r_1 < 2$$

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_{c_1} \frac{\frac{z}{(z-1)(z-2)}}{(z-0)^{n+1}}\, dz \qquad n = 1, 2, \dots$$

$$a_0 = \frac{1}{2\pi i}\oint_{c_1} \frac{\frac{z}{(z-1)(z-2)}}{z}\, dz = \frac{1}{2\pi i}\oint_{c_2} \frac{1}{(z-1)(z-2)}\, dz$$

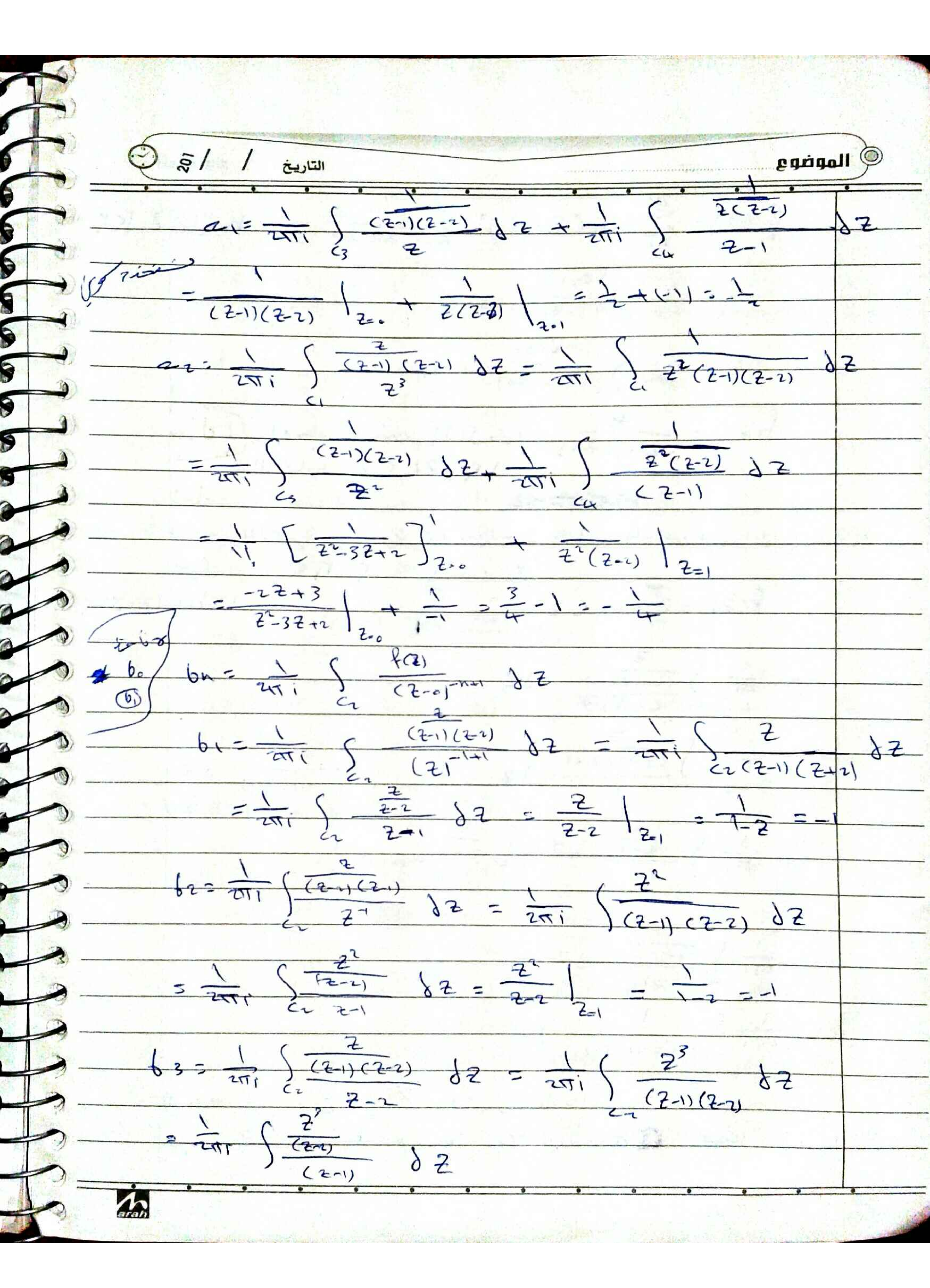
$$a_0 = \frac{1}{2\pi i}\oint_{c_1} \frac{\frac{1}{z-2}}{z-1}\, dz = \left[\frac{1}{z-2}\right]_{z=1} = -1$$

$$a_1 = \frac{1}{2\pi i}\oint_{c_1} \frac{\frac{z}{(z-1)(z-2)}}{z^2}\, dz$$

$$a_1 = \frac{1}{2\pi i}\oint_{c_1} \frac{1}{z(z-1)(z-2)}\, dz$$

نلاحظ بأن $z=0$ و $z=1$ يقعان في داخلية c_1

نحيط $z=0$ بدائرة c_3 ونحيط $z=1$ بدائرة c_4 بحيث أن $c_3 \cap c_4 = \phi$



$$a_1 = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_3} \frac{\frac{1}{(z-1)(z-2)}}{z}\,dz + \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_4} \frac{\frac{1}{z(z-2)}}{z-1}\,dz$$

$$= \frac{1}{(z-1)(z-2)}\Big|_{z=0} + \frac{1}{z(z-2)}\Big|_{z=1} = \frac{1}{2} + (-1) = -\frac{1}{2}$$

$$a_2 = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1} \frac{\frac{z}{(z-1)(z-2)}}{z^3}\,dz = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1} \frac{1}{z^2(z-1)(z-2)}\,dz$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_3} \frac{\frac{1}{(z-1)(z-2)}}{z^2}\,dz + \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_4} \frac{\frac{1}{z^2(z-2)}}{(z-1)}\,dz$$

$$= \frac{1}{1!}\left[\frac{1}{z^2-3z+2}\right]'_{z=0} + \frac{1}{z^2(z-2)}\Big|_{z=1}$$

$$= \frac{-2z+3}{z^2-3z+2}\Big|_{z=0} + \frac{1}{-1} = \frac{3}{4} - 1 = -\frac{1}{4}$$

b_0 (b_1)

$$b_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_2} \frac{f(z)}{(z-0)^{-n+1}}\,dz$$

$$b_1 = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_2} \frac{\frac{z}{(z-1)(z-2)}}{(z)^{-1+1}}\,dz = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_2} \frac{z}{(z-1)(z-2)}\,dz$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_2} \frac{\frac{z}{z-2}}{z-1}\,dz = \frac{z}{z-2}\Big|_{z=1} = \frac{1}{1-2} = -1$$

$$b_2 = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_2} \frac{\frac{z}{(z-1)(z-2)}}{z^{-1}}\,dz = \frac{1}{2\pi i}\oint \frac{z^2}{(z-1)(z-2)}\,dz$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_2} \frac{\frac{z^2}{(z-2)}}{z-1}\,dz = \frac{z^2}{z-2}\Big|_{z=1} = \frac{1}{1-2} = -1$$

$$b_3 = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_2} \frac{\frac{z}{(z-1)(z-2)}}{z^{-2}}\,dz = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_2} \frac{z^3}{(z-1)(z-2)}\,dz$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\oint \frac{\frac{z^3}{(z-2)}}{(z-1)}\,dz$$

$$= \frac{z^3}{(z-2)}\Big|_{z=1} = -1$$

$$f(z) = -1 - \frac{1}{2}z - \frac{1}{4}z^2 - \frac{1}{8}z^3 + \dots + \frac{1}{2^n}z^n + \dots$$

$$-\frac{1}{z} - \frac{1}{z^2} - \frac{1}{z^3} - \dots - \frac{1}{z^n} - \dots , \quad 1<|z|<2$$

$$f(z) = -\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^n - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^n}, \quad 1<|z|<2$$

$$f(z) = \frac{z}{(z-1)(z-2)} = \frac{A}{z-1} + \frac{B}{z-2}$$

$$\frac{z}{z-2} = A + \frac{B(z-1)}{z-2}$$

نعوض عن z بـ 1 فنجد أن :

$$\frac{1}{1-2} = A \Rightarrow A = -1$$

$$\frac{z}{z-1} = \frac{A(z-2)}{z-1} + B$$

نعوض عن z بـ 2 فنجد أن

$$B = 2$$

$$f(z) = -\frac{1}{z-1} + \frac{2}{z-2}$$

$$f(z) = -\frac{1}{z}\,\frac{1}{1-\frac{1}{z}} + \frac{1}{\frac{z}{2}-1} = -\frac{1}{z}\,\frac{1}{1-\frac{1}{z}} - \frac{1}{1-\frac{z}{2}}$$

$\frac{1}{1+c}$ $\quad$ $\frac{1}{1+c}$

$$f(z) = -\left[1 + \frac{z}{2} + \frac{z^2}{4} + \frac{z^3}{8} + \dots + \frac{z^n}{2^n} + \dots\right]$$

$$-\frac{1}{z}\left[1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^3} + \dots + \frac{1}{z^n} + \dots\right]$$

$$f(z) = -\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^n - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^n}$$